чему $A_1 \setminus A \in \mathcal{A}$ и $A_1 \setminus A_n \in \mathcal{A}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Користећи претходно својство имамо:

$$\begin{aligned}\mu(A_1) - \mu(A) &= \mu(A_1 \setminus A) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_1 \setminus A_n) \\ &= \lim_{n\to+\infty} [\mu(A_1) - \mu(A_n)] = \mu(A_1) - \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).\end{aligned}$$

Како је $\mu(A_1) < +\infty$ одатле следи $-\mu(A) = -\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$, па је ово својство доказано.

5° (пребројива субадитивност) Ако је $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ низ скупова из $\mathcal{A}$ чија унија $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ такође припада $\mathcal{A}$, онда је

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Доказ је аналоган доказу својства коначне субадитивности: формирамо низ $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ на следећи начин: $B_1 = A_1$,

$$B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \qquad \text{за све } n \geq 2.$$

Тада $B_n \in \mathcal{A}$ и $B_n \subset A_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$, осим тога $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n$, па је

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \mu\Big(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Завршимо ову општу дискусију мера на алгебрама једним критеријумом.

Став 3.6. ***Коначно адишивна мера μ на алгебри $\mathcal{A}$ која је непрекидна одоздо је мера.***

$\triangle$ Нека је $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где је $A \in \mathcal{A}$ и $A_n \in \mathcal{A}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Уведимо $B_n = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$. Тада је $B_n \in \mathcal{A}$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и $B_n \uparrow A$, па из непрекидности одоздо и коначне адитивности следи

$$\mu(A) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu\Big(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k). \qquad \square$$

Размотримо сада конкретну ситуацију: нека је $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ растућа функција, знамо да она генерише коначно адитивну меру m_α на алгебри $\mathfrak{E}$ елементарних скупова на $\mathbb{R}$. Под којим условима је m_α мера на $\mathfrak{E}$? Прво, ако је m_α мера, онда је функција α непрекидна слева, то јест,

$$\lim_{x\uparrow x_0} \alpha(x) = \alpha(x_0) \qquad \text{за све } x_0 \in \mathbb{R}.$$

Заиста, како $[x_1, x_0 - 1/n) \uparrow [x_1, x_0)$, то из непрекидности m_α одоздо следи

$$\alpha(x_0 - 1/n) - \alpha(x_1) = m_\alpha([x_1, x_0 - 1/n) \uparrow m_\alpha([x_1, x_0)) = \alpha(x_0) - \alpha(x_1),$$

па $\alpha(x_0 - \frac{1}{n}) \uparrow \alpha(x_0)$. Како због монотоности α постоји $\alpha(x_0-) = \lim_{x\uparrow x_0} \alpha(x)$, тада је и $\alpha(x_0-) = \lim_{n\to\infty} \alpha(x_0 - 1/n) = \alpha(x_0)$, што показује да је α непрекидна слева у тачки x_0.

Покажимо да важи и обрнуто: ако је α растућа и непрекидна слева, тада је m_α мера на $\mathfrak{E}$. У том циљу докажимо прво варијанту става 3.3.